טכניון – מכון טכנולוגי לישראל

פתרון מבחן במד"ר ח' –104131- סמסטר חורף תשע"ו– מועד א' 13.2.17

במבחן שלפניכם שש שאלות. משך המבחן שלוש שעות. הניקוד בגוף השאלון. אסור להשתמש בחומר עזר כלשהו מלבד דף התמרות לפלס שיחולק. יש לכתוב בעט שחור או כחול בלבד. יש לנמק ולהסביר כל צעד.

שאלה 1 המקורית (25 נק')

נתונה הבעיה:

$$\left(y+x^2\right)dx+(y+x)dy=0 \quad , \quad x>0$$
$$y(1)=1$$

א) (5 נק') האם לבעיה מובטח קיום פתרון יחיד? צטטו במדויק את המשפט עליו אתם מסתמכים.

ב) (15 נק') פתרו את הבעיה. הציגו פתרון בצורה סתומה.

ג) (5 נק') מצאו משוואת המשיק לעקומה אינטגרלית הנ"ל בנקודה $Q(1,1)$.

פתרון

א) נרשום את המשוואה בצורה מנורמלת: $y'=-\dfrac{y+x^2}{y+x}$

הפונקציות

$$F(x,y)=-\frac{y+x^2}{y+x}, \quad F_y(x,y)=-\frac{(y+x)-(y+x^2)}{(y+x)^2}=\frac{x^2-x}{(y+x)^2}$$

רציפות בכל נקודה בה $y+x\neq 0$ (פונקציות אלמנטריות, מכנה שונה מאפס).

בפרט הפונקציות רציפות במלבן $D=\left\{(x,y)\middle|0<x<\infty, \quad 0<y<\infty\right\}$

הנקודה $(1,1)$ שייכת למלבן D, לכן לבעיה קיים פתרון יחיד, המוגדר בסביבה כלשהי של נקודת ההתחלה.

ב) נבדוק האם המשוואה מדויקת: $\left(y+x^2\right)dx+(y+x)dy=0 \quad , \quad x>0$

$$M'_y=1 \qquad N'_x=1$$

המשוואה מדויקת.

נמצא את פונקציית הפוטנציאל:

$$F(x,y)=\int\left(y+x^2\right)dx=xy+\frac{x^3}{3}+c(y)$$

$$F_y(x,y)=x+c'(y)=y+x$$

$$c'(y)=y \quad\Rightarrow\quad c(y)=\frac{y^2}{2}$$

$$F(x,y)=xy+\frac{x^3}{3}+\frac{y^2}{2}$$

הפתרון הכללי בצורה סתומה: $xy+\frac{x^3}{3}+\frac{y^2}{2}=c$

הפתרון הפרטי מקיים: $1+\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}=c \quad\Rightarrow\quad c=\frac{11}{6}$

הפתרון לבעיה הנתונה: $xy+\frac{x^3}{3}+\frac{y^2}{2}=\frac{11}{6}$.

ג) כיוון שנתון $y'=-\frac{y+x^2}{y+x}$

שיפוע המשיק בנקודה הנתונה יהיה: $y'=-\frac{1+1^2}{1+1}=-1$

משוואת המשיק: $y-y_0=m(x-x_0) \quad\Rightarrow\quad y-1=-1(x-1)$

<u>שאלה 2</u> (15 נק')

נתונה המשוואה $y''-y'+e^{2x}y=e^{2x}$. נתונים 2 פתרונות למשוואה: $y_1=\sin\left(e^x\right)+1, \quad y_2=1$.

א) (3 נק') קבלו פתרון למד"ר ההומוגנית המתאימה ובדקו תשובתכם.

ב) (12 נק') מצאו פתרון כללי למד"ר הנתונה בשיטת הורדת סדר.

יש לפתח את הפתרון, אין להשתמש בנוסחת אבל. רמז: $\int\frac{1}{\sin^2 t}dt=-\cot(t)+c$.

<u>פתרון</u>

א) הפרש של שני פתרונות למד"ר האי הומוגנית מהווה פתרון למד"ר ההומוגנית,

לכן פתרון אחד יהיה: $y_h=\sin\left(e^x\right)$.

נגזור: $y_h'=e^x\cos\left(e^x\right), \quad y_h''=e^x\cos\left(e^x\right)-e^{2x}\sin\left(e^x\right)$

נציב:

$$y''-y'+e^{2x}y=$$

$$e^x\cos(e^x)-e^{2x}\sin(e^x)-\left(e^x\cos(e^x)\right)+e^{2x}\sin(e^x)=0$$

והמשוואה מתקיימת.

ב) נחפש פתרון שני ע"י הורדת סדר: $y = v(x)\sin(e^x)$

נגזור:

$$y' = v(x)e^x\cos(e^x) + v'(x)\sin(e^x),$$
$$y'' = v(x)\left(e^x\cos(e^x) - e^{2x}\sin(e^x)\right) + 2v'(x)e^x\cos(e^x) + v''(x)\sin(e^x)$$

נציב:

$$y'' - y' + e^{2x}y =$$
$$= v(x)\left(e^x\cos(e^x) - e^{2x}\sin(e^x)\right) + 2v'(x)e^x\cos(e^x) + v''(x)\sin(e^x) -$$
$$\left(v(x)e^x\cos(e^x) + v'(x)\sin(e^x)\right) + e^{2x}\sin(e^x)v(x) = 0$$

נסדר:

$$2v'(x)e^x\cos(e^x) + v''(x)\sin(e^x) - v'(x)\sin(e^x) = 0$$

נסמן: $z = v'$ ונפתור: $2z(x)e^x\cos(e^x) + z'(x)\sin(e^x) - z\sin(e^x) = 0$.

ע"י הפרדת משתנים:

$$\int\frac{dz}{z} = \int 1\left(1 - \frac{2e^x\cos(e^x)}{\sin(e^x)}\right)dx \quad \Rightarrow \quad \ln|z| = x - 2\ln|\sin(e^x)| + c$$

נקבל: $z = e^x\left(\sin(e^x)\right)^{-2}$

ולכן: $v = \int e^x\left(\sin(e^x)\right)^{-2}dx = \int\frac{1}{\sin^2 t}dt = -\cot(t) + c = -\cos(e^x) + c$

נבחר *c=0*, והפתרון השני: $y = -\cot(e^x)\sin(e^x) = -\cos(e^x)$

פתרון כללי למד"ר ההומוגנית: $y = a\sin(e^x) + b\cos(e^x)$

פתרון כללי למד"ר האי-הומוגנית: $y = a\sin(e^x) + b\cos(e^x) + 1$.

<u>שאלה 3 (15 נק')</u>

מצאו פתרון כללי למשוואה: $y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\cos x}$.

<u>פתרון</u>

הפולינום האופיני: $r^2 - 2r + 2 = 0$

השורשים: $r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$

פתרון כללי למד"ר ההומוגנית: $y_h = c_1e^x\sin x + c_2e^x\cos x$

פתרון פרטי למד"ר האי-הומוגנית: $y_p = c_1(x)e^x\sin x + c_2(x)e^x\cos x$

כאשר המקדמים יקימו את המערכת:

$$c_1'(x)e^x\sin x+c_2'(x)e^x\cos x=0$$

$$c_1'(x)\left(e^x\sin x+e^x\cos x\right)+c_2'(x)\left(e^x\cos x-e^x\sin x\right)=\frac{e^x}{\cos x}$$

מהמשוואה הראשונה: $c_1'(x)=-c_2'(x)\dfrac{\cos x}{\sin x}$

ע"י הצבה במשוואה השניה:

$$-c_2'(x)\frac{\cos x}{\sin x}\left(e^x\sin x+e^x\cos x\right)+c_2'(x)\left(e^x\cos x-e^x\sin x\right)=\frac{e^x}{\cos x}$$

נקבל:

$$c_2'(x)\left(-\cos x-\frac{\cos^2 x}{\sin x}+\cos x-\sin x\right)=\frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow\quad -c_2'(x)\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}+\frac{\sin^2 x}{\sin x}\right)=\frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow\quad c_2'(x)=-\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow\quad c_1'(x)=-\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)\frac{\cos x}{\sin x}=1$$

ע"י אינטגרציה: $c_1(x)=x,\quad c_2(x)=\ln|\cos x|$

הפתרון הפרטי המתקבל: $y_p=xe^x\sin x+\ln|\cos x|\,e^x\cos x$

הפתרון הכללי למד"ר האי-הומוגנית:

$y=c_1e^x\sin x+c_2e^x\cos x+xe^x\sin x+\ln|\cos x|\,e^x\cos x$.

<u>שאלה 4 (15 נק')</u>

מצאו פתרון למערכת: $\begin{cases}x_1'=3x_1-x_2\\ x_2'=4x_1-x_2\end{cases}$ המקיים $\begin{pmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

<u>פתרון</u>

<u>דרך 1</u>: נמצא ערכים עצמיים למטריצה $\begin{pmatrix}3&-1\\4&-1\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}3-\lambda&-1\\4&-1-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftarrow(3-\lambda)(-1-\lambda)+4=0\Leftarrow\lambda^2-2\lambda+1=0\Leftarrow\lambda=1\ .$$

נמצא וקטור עצמי שמתאים לערך עצמי $\lambda=1$. יש למצוא וקטור $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ המקיים

$\begin{pmatrix}2&-1\\4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. הבסיס למרחב העצמי הוא $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

הפתרון שהתקבל: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = ce^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

כיוון שעבור $c=1$ מתקיים תנאי ההתחלה: $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = 1e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

הפתרון המבוקש הוא: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

<u>דרך 2:</u>

נמצא וקטור $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ המקיים $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^t$$

נתון ש $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

ולכן $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{matrix}$

הפתרון הוא $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t$

<u>שאלה 5</u> (15 נק')

פתרו את המשוואה $y'' + (x-1)y' + (2x-3)y = 0$ בעזרת טור חזקות.

א) (10 נק') מצאו נוסחא רקורסיבית למקדמים.
ב) (5 נק') מצאו שלושה איברים ראשונים (שאינם אפס) בפתרון המד"ר המקיים בנוסף את התנאים: $y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

<u>פתרון</u>

א) נניח כי הפתרון מקיים $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

נגזור: $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2}$

נציב במשוואה ונקבל:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_n x^{n-2}+(x-1)\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}+(2x-3)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_n x^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n}-\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}2a_n x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}3a_n x^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}2a_{n-1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}3a_n x^n=0$$

$$2a_2-a_1-3a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}2a_{n-1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}3a_n x^n=0$$

כלומר

$$2a_2-a_1-3a_0+\left(\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}+na_n-(n+1)a_{n+1}+2a_{n-1}-3a_n\right)x^n$$

מכאן נקבל כי

$$2a_2-a_1-3a_0=0$$

$$a_2=\frac{a_1+3a_0}{2}$$

ועבור $n\geq 1$: $(n+1)(n+2)a_{n+2}+na_n-(n+1)a_{n+1}+2a_{n-1}-3a_n=0$

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}=\left(3-n\right)a_n+(n+1)a_{n+1}-2a_{n-1}$$

ולכן לכל $n\geq 1$: $a_{n+2}=\dfrac{\left(3-n\right)a_n+(n+1)a_{n+1}-2a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$

ב) מהתנאים: $a_0=0,\quad a_1=2$

$$a_2=\frac{a_1+3a_0}{2}=1$$

$$n=1\quad\Rightarrow\quad a_3=\frac{2a_1+2a_2-2a_0}{6}=\frac{4+2-0}{6}=1$$

הפתרון:

$$y(x)=2x+x^2+x^3+\ldots$$

<u>שאלה 6</u> (15 נק')

פתרו את המד"ר הבאה בעזרת התמרת לפלס:

$$y''-4y'+4y=3,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1$$

<u>פתרון</u>

נפעיל התמרת לפלאס על שני האגפים, מהלינאריות:

$$L[y'']-4L[y']+4L[y]=L[3]$$

ממשפט התמרה של נגזרת:

$$s^2L[y]-sy(0)-y'(0)-4\left(sL[y]-y(0)\right)+4L[y]=3L[1]$$

נציב את ההתמרה הידועה: $L[1]=\frac{1}{s}$ ואת תנאי ההתחלה הנתונים:

$$s^2L[y]-s-1-4\left(sL[y]-1\right)+4L[y]=\frac{3}{s}$$

נקבל:

$$L[y]\left(s^2-4s+4\right)=\frac{3}{s}+s-3$$

$$L[y]=\frac{3}{s(s-2)^2}+\frac{s-3}{(s-2)^2}$$

נפרק: $\frac{3}{s(s-2)^2}=\frac{A}{(s-2)}+\frac{B}{(s-2)^2}+\frac{C}{s}$

נכפול: $3=A(s-2)s+Bs+C(s-2)^2$

נציב: $s=2\ \Rightarrow\ 3=2B\ \Rightarrow\ B=\frac{3}{2}$

$$s=0\ \Rightarrow\ 3=4C\ \Rightarrow\ C=\frac{3}{4}$$

$$s=1\ \Rightarrow\ 3=-A+B+C\ \Rightarrow\ 3=-A+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\ \Rightarrow\ A=\frac{-3}{4}$$

הפרוק: $\frac{3}{s(s-2)^2}=\frac{\frac{-3}{4}}{(s-2)}+\frac{\frac{3}{2}}{(s-2)^2}+\frac{\frac{3}{4}}{s}$

בנוסף: $\frac{s-3}{(s-2)^2}=\frac{s-2-1}{(s-2)^2}=\frac{s-2}{(s-2)^2}-\frac{1}{(s-2)^2}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{(s-2)^2}$

ולכן: $L[y]=\frac{\frac{-3}{4}}{(s-2)}+\frac{\frac{3}{2}}{(s-2)^2}+\frac{\frac{3}{4}}{s}+\frac{1}{s-2}-\frac{1}{(s-2)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(s-2)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s}$

וההתמרה ההפוכה: $y(x)=\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{3}{4}$

בהצלחה!